

# 基于重新匹配策略的 $\varepsilon$ 约束多目标分解优化算法

张 磊<sup>1</sup>, 毕晓君<sup>2</sup>, 王艳娇<sup>3</sup>

(1. 长江大学电子信息学院, 湖北荆州 434000; 2. 哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 黑龙江哈尔滨 150000;  
3. 东北电力大学信息工程学院, 吉林吉林 132012)

**摘 要:** 针对 MOEA/D 算法中权重向量与个体分配不合理, 导致种群多样性降低的问题, 提出基于重新匹配策略的  $\varepsilon$  约束多目标分解优化算法. 首先, 对 Tehebycheff 分解策略进行理论分析, 推导出关于多样性和收敛性的定理, 从而为研究 MOEA/D 算法奠定理论基础. 其次, 为有效解决由于随机为权重向量分配个体造成种群多样性降低的问题, 提出权重向量和个体间的重新匹配策略, 合理地分配个体, 改善种群多样性. 最后, 提出的个体比较准则较好地兼顾多样性和收敛性, 提高了算法的约束多目标优化性能. 通过与 5 种优秀算法的对比实验结果表明, 该算法所求得的近似 Pareto 最优解集的分布性和收敛性均得到一定提高, 相比于对比算法具有一定的优势.

**关键词:** 约束多目标优化; 分解策略; 重新匹配;  $\varepsilon$  约束

**中图分类号:** TP18

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2018)05-1032-09

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.05.002

## The $\varepsilon$ Constrained Multi-objective Decomposition Optimization Algorithm Based on Re-matching Strategy

ZHANG Lei<sup>1</sup>, BI Xiao-jun<sup>2</sup>, WANG Yan-jiao<sup>3</sup>

(1. College of Electronics & Information, Yangtze University, Jingzhou, Hubei 434000, China;

2. College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150000, China;

3. College of Information Engineering, Northeast Electric Power University, Jilin, Jilin 132012, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that unreasonable distribution between weight vector and individual in MOEA/D reduce diversity, the  $\varepsilon$  constrained multi-objective decomposition optimization algorithm based on re-matching strategy is proposed. Firstly, through theoretical analysis of the chebycheff decomposition strategy, two theorems about diversity and convergence are gained, which could provide a theoretical basis for the research of MOEA/D. Secondly, in order to solve the problem of diversity reduction caused by random assignment of individual to weight vector, the re-matching strategy is presented for reasonably assigning individual to weight vector, and then diversity is improved. Finally, the suggested individual comparison criterion has a good balance between diversity and convergence, and it increases optimization performance. Comparative experiment results with five excellent algorithms show that our algorithm achieves better diversity and convergence, and our algorithm has a certain advantage.

**Key words:** constrained multi-objective optimization; decomposition strategy; re-matching; epsilon constraint

### 1 引言

2007 年 Zhang 等人提出一种新型模式下的进化算法—MOEA/D<sup>[1]</sup>. MOEA/D 采用分解策略比较个体, 为求解无约束多目标优化问题提供新思路. MOEA/D 相

比于采用拥挤距离等方法来维持种群多样性的进化算法, 能够产生更均匀的 Pareto 最优解集. 同时, MOEA/D 利用临近子问题的信息进行协同进化的思想是其他进化算法所不具备的.

近年学者将 MOEA/D 与粒子群算法<sup>[2,3]</sup>、差分进

化算法<sup>[4~6]</sup>等启发式搜索机制结合,引入变异操作算子<sup>[7,8]</sup>、非线性交叉算子<sup>[9]</sup>等更新后代操作,以提高 MOEA/D 在无约束多目标优化上的求解性能.然而,MOEA/D 在约束多目标优化的研究成果较少,主要有以下四种.文献[10]将随机排序法、Deb 准则和 MOEA/D-DE 结合.实验结果表明,Deb 准则比随机排序法获得了更佳性能.文献[11]将惩罚函数法与 MOEA/D-DE 结合,为 Tchebycheff 分解函数增加惩罚项来处理约束条件,并在 CF 系列测试函数上取得良好效果,但该算法需通过大量实验来设置合适的惩罚系数.文献[12]提出基于 Deb 准则的 MOEA/D 算法,将遗传算法作为进化策略,具有较快收敛速度,但在非凸问题上收敛精度较低以及易陷入局部最优.文献[13]对分解函数增加惩罚项来构成新适应度函数,该算法实质上 and 文献[11]一样,将惩罚函数加到分解函数上,但在求解真实 PF 是尖端点的问题时,易遗失部分搜索区域.

上述算法均是简单将 MOEA/D 与约束处理技术结合,没从 MOEA/D 内在机制以及与约束处理技术的适应性上展开研究,限制了优化效率的提升.经研究发现,MOEA/D 在处理约束多目标优化问题时主要存在以下两方面问题:(1)初始化阶段为每个权重向量随机分配个体,由于该个体可能是在另一权重向量下的最优解,而在当前权重向量下的适应度值很差,导致进化中该个体被其他个体取代,从而严重影响种群的多样性和收敛性.(2)分解聚合函数不能处理约束条件,急需将约束处理技术与聚合函数有机融合以提高约束多目标优化性能.

为此,提出基于重新匹配策略的  $\varepsilon$  约束多目标分解优化算法— $\varepsilon$ C-MOEA/D.对 Tchebycheff 分解策略进行分析,推导出多样性和收敛性的定理;提出权重向量和个体间的重新匹配策略,有效解决因随机为权重向量分配个体造成种群多样性降低的问题; $\varepsilon$  约束方法在进化前期注重多样性而在进化后期注重收敛性,提高进化效率.

## 2 Tchebycheff 分解策略

Tchebycheff 分解策略<sup>[14]</sup>是目前最常用的分解方法,其数学表达式如式(1)所示.

$$\min g^{te}(\mathbf{X}|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}^*) = \max_{1 \leq i \leq m} \{ |\lambda_i(f_i(\mathbf{X}) - z_i^*)| \} \quad (1)$$

式中,权重向量  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m)$  满足  $\lambda_i \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \mathbf{z}^* = (z_1^*, \dots, z_i^*, \dots, z_m^*)$  为参考点,是种群在每个目标上的最优值,  $z_i^* = \min \{ f_i(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in \Omega \}$ .

Pareto 支配和 Pareto 最优解定义如下.

**定义 1** Pareto 支配

两个解  $\mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$ , 当满足:(1)  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,

$f_i(\mathbf{X}_1) \leq f_i(\mathbf{X}_2)$ ; (2)  $\exists j \in \{1, 2, \dots, m\}, f_j(\mathbf{X}_1) < f_j(\mathbf{X}_2)$ , 则称  $\mathbf{X}_1$  Pareto 支配  $\mathbf{X}_2$ , 记为  $\mathbf{X}_1 > \mathbf{X}_2$ . 其中,  $\mathbf{X}_1$  称为非支配的,  $\mathbf{X}_2$  称为被支配的.

**定义 2** Pareto 最优解

若解  $\mathbf{X}^*$  不受决策空间中其它任意解的支配,即  $\neg \exists \mathbf{X} \in R^n: \mathbf{X} > \mathbf{X}^*$ , 则称  $\mathbf{X}^*$  为 Pareto 最优解.

那么 Tchebycheff 分解策略如何保证种群的收敛性和多样性? 下面将推导两个定理进行说明.

**定理 1** 如果在权重向量  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m)$  下,  $\mathbf{X}$  满足式(1), 则  $\mathbf{X}$  是 Pareto 最优解.

证明: $\mathbf{X}$  满足式(1), 故在  $\boldsymbol{\lambda}$  下,  $\forall \mathbf{Y} \in R^n$ ,

$$\max_{1 \leq i \leq m} \{ |\lambda_i(f_i(\mathbf{X}) - z_i^*)| \} < \max_{1 \leq i \leq m} \{ |\lambda_i(f_i(\mathbf{Y}) - z_i^*)| \},$$

所以  $\exists j \in \{1, 2, \dots, m\}, \lambda_j(f_j(\mathbf{X}) - z_j^*) < \lambda_j(f_j(\mathbf{Y}) - z_j^*)$ ,

所以  $\exists j \in \{1, 2, \dots, m\}, f_j(\mathbf{X}) < f_j(\mathbf{Y})$ ,

所以  $\mathbf{X}$  是 Pareto 最优解, 得证.

**定理 2** 假设无约束多目标优化问题的真实 PF 分段连续, 如直线  $\frac{f_1 - z_1^*}{1/\lambda_1} = \frac{f_2 - z_2^*}{1/\lambda_2} = \dots = \frac{f_m - z_m^*}{1/\lambda_m}$  ( $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$ ) 与真实 PF 有交点, 则该交点就是权重向量  $\boldsymbol{\lambda}$  对应子问题的 Pareto 最优解.

证明:假设  $\bar{\mathbf{f}} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m)$  是  $\boldsymbol{\lambda}$  对应子问题的最优解, 但不在直线  $\frac{f_1 - z_1^*}{1/\lambda_1} = \frac{f_2 - z_2^*}{1/\lambda_2} = \dots = \frac{f_m - z_m^*}{1/\lambda_m}$  上, 所以有非空集合  $\bar{A}$  和  $\bar{B}$ .

$$\bar{A} = \{ j | \lambda_j \times |\bar{f}_j - z_j^*| < \max_{1 \leq i \leq m} \{ |\lambda_i(\bar{f}_i - z_i^*)| \}, j = 1, 2, \dots, m \}$$

$$\bar{B} = \{ k | \lambda_k \times |\bar{f}_k - z_k^*| < \max_{1 \leq i \leq m} \{ |\lambda_i(\bar{f}_i - z_i^*)| \}, k = 1, 2, \dots, m \}$$

假定  $\bar{\mathbf{f}}$  在真实 PF 上. 由于真实 PF 是分段连续的, 如果  $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_m)$  是  $\bar{\mathbf{f}}$  的邻域点,  $\hat{\mathbf{f}}$  满足如下条件:(1)  $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_m)$  是 Pareto 最优解;(2)  $\hat{f}_j > \bar{f}_j, j \in \bar{A}; \hat{f}_k > \bar{f}_k, k \in \bar{B}$ .

$$z_i^* = \min \{ f_i(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in \Omega \}, \text{ 所以 } z_i^* \leq f_i(\mathbf{X}),$$

$$|f_i(\mathbf{X}) - z_i^*| = f_i(\mathbf{X}) - z_i^* \geq 0$$

因为  $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_m)$  是  $\bar{\mathbf{f}}$  的邻域点, 所以

$$\lambda_j \times (\hat{f}_j - z_j^*) < \lambda_j \times (\bar{f}_j - z_j^*) < \lambda_k \times (\bar{f}_k - z_k^*)$$

$$< \lambda_k \times (\bar{f}_k - z_k^*), j \in \bar{A}, k \in \bar{B}$$

$$g^{te}(\hat{\mathbf{f}}|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}^*) = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \lambda_i(\hat{f}_i - z_i^*) \} = \max_{k \in \bar{A}} \{ \lambda_k(\hat{f}_k - z_k^*) \}$$

$$< \max_{k \in \bar{A}} \{ \lambda_k(\bar{f}_k - z_k^*) \} = g^{te}(\bar{\mathbf{f}}|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}^*)$$

然而,这与  $\bar{\mathbf{f}}$  是 Pareto 最优解矛盾, 故得证.

根据定理 1 得知, 满足式(1)的解是 Pareto 最优解, 所以 Tchebycheff 分解策略能保证收敛性. 根据定理 2

得知,权重向量与真实 PF 的交点是满足式(1)的最优解,由于权重向量的均匀性,保证了所求近似 Pareto 最优解集的均匀性.图 1 给出了权重向量与最优解在真实 PF 上的对应关系.

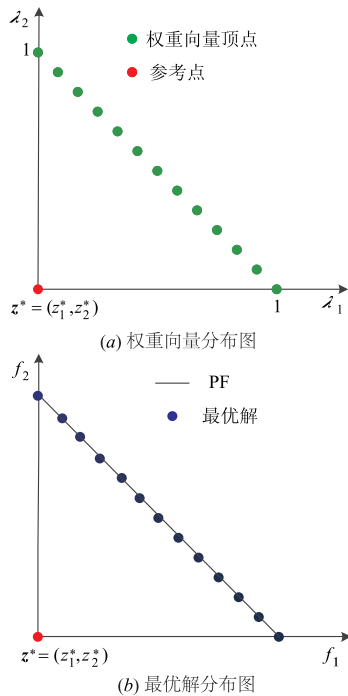


图1 权重向量与最优解在Pareto前沿面上的对应关系

### 3 重新匹配的 $\epsilon$ 约束多目标分解优化算法

#### 3.1 权重向量与个体间的重新匹配

MOEA/D 在进化初始阶段随机为权重向量分配个体,导致在其他权重向量  $\lambda_j$  下的最优解  $X$  分配给了当前权重向量  $\lambda_i$ ,而  $\lambda_i$  对应个体  $X$  的适应度值较差.随着不断进化, $X$  将会被在  $\lambda_i$  下具有更优适应度值的个体取代,导致  $\lambda_j$  对应的最优解  $X$  被遗弃,严重影响多样性和收敛性.如图 2 所示.

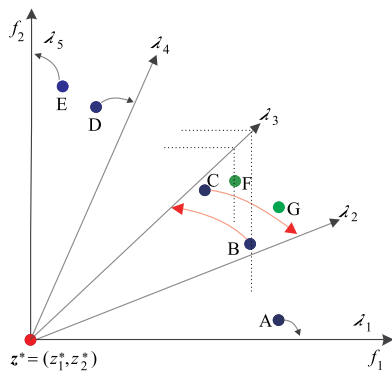


图2 随机方式给权重向量分配个体

由图 2 可以看出,经随机分配方式为权重向量分配

个体后,B 可能会被分配给  $\lambda_3$ ,C 可能会被分配给  $\lambda_2$ ,但是 B 在  $\lambda_3$  下将被个体 F 取代,C 在  $\lambda_2$  下将被 G 取代,从而种群保留 F 和 G.但是可以明显看出,B 和 C 的 Pareto 等级是优于 F 和 G 的(B 和 C 互不支配,B Pareto 支配 G,C Pareto 支配 F),所以随机分配方式严重损害了多样性和收敛性.

经过深入分析发现,解决上述问题的关键在于如何为权重向量分配个体,即权重向量偏重什么样的个体.显而易见应该优先考虑在权重向量下,满足式(1)的最优解.为此,提出一种权重向量偏好个体的偏序关系,如式(2)所示.

$$\Delta_{\lambda}(X, \lambda) = g^{le}(X | \lambda, z^*) = \max_{1 \leq i \leq m} \{ |\lambda_i (f_i(X) - z_i^*)| \} \quad (2)$$

式中,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m)$  满足  $\lambda_i \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*)$  为参考点,  $X$  为种群中的个体,  $z_i^* = \min \{ f_i(X) | X \in \Omega \}$ .

上述偏序关系实质是计算权重向量  $\lambda$  与种群所有个体的  $\Delta_{\lambda}$ ,并选择具有最小  $\Delta_{\lambda}$  的个体,作为  $\lambda$  的分配个体.  $\Delta_{\lambda}$  越小,说明  $\lambda$  越偏重个体.然而,它只考虑了权重向量的主动选择权,而忽略了个体的选择权,导致出现多个权重向量会选择同一个体的情况,从而降低种群多样性.如图 3 所示.

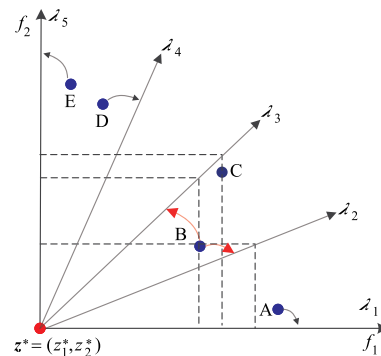


图3 权重向量偏好个体示意图

从图 3 可以看出,B 在  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  下都具有最小的  $\Delta_{\lambda}$ ,所以  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  均会选择 B 作为其分配个体,而遗弃 C,从而不利于种群的多样性维护.

解决上述问题的关键在于让个体主动参与选择权重向量,从而让更多的个体分配到权重向量,以提高种群多样性.为此,提出另一种个体偏好权重向量的偏向关系,如式(3)和式(4)所示.

$$\Delta_X(X, \lambda) = \| \hat{F}(X) - \frac{\lambda^T \hat{F}(X)}{\lambda^T \lambda} \lambda \| \quad (3)$$

式中,  $\hat{F}(X) = (\hat{f}_1(X), \dots, \hat{f}_i(X), \dots, \hat{f}_m(X))$ .

$$\hat{f}_i(\mathbf{X}) = \frac{f_i(\mathbf{X}) - z_i^*}{\overline{f}_i(\mathbf{X}) - z_i^*} \quad (4)$$

式中  $\overline{f}_i(\mathbf{X}) = \max\{f_i(\mathbf{X})\}$ ,  $z_i^* = \min\{f_i(\mathbf{X})\}$ .

式(3)实质是计算目标向量到权重向量的垂直距离  $\Delta_X$ ,  $\Delta_X$  越小说明  $\mathbf{X}$  越偏重其对应的权重向量. 当多个权重向量同时选择同一个体  $\mathbf{X}$  时, 将个体  $\mathbf{X}$  分配给具有更小  $\Delta_X$  的权重向量.

经过重新匹配策略, 权重向量和个体之间将会形成一一对应关系, 如图 4 所示.

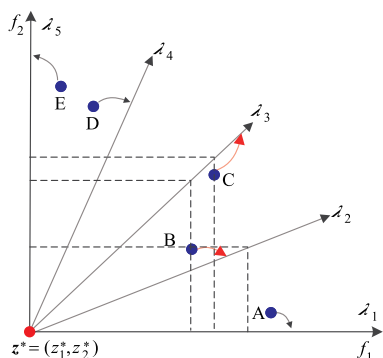


图4 权重向量与个体重新分配示意图

从图 4 可以看出, 最终将 B 分配给  $\lambda_2$ , 将 C 分配给  $\lambda_3$ . 因为 B 在  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  中更偏重  $\lambda_2$ , 所以优先将 B 和  $\lambda_2$  配对, 而除 B 之外 C 在  $\lambda_3$  下的  $\Delta_\lambda$  最小, 所以将 C 和  $\lambda_3$  配对. 因此, 重新匹配策略能够合理地分配个体, 改善了种群多样性, 并为最终求得均匀的 Pareto 最优解集提供保障.

### 3.2 个体比较准则

相比于无约束多目标优化问题, 约束多目标优化问题的求解需要更好维护种群多样性并对搜索空间进行充分探索, 才能有效避免陷入局部搜索. 其中, 约束处理技术是最关键的技术, 它对于平衡可行解与不可行解的关系起着十分重要的作用. 研究表明, 优秀的不可行解在进化中扮演着重要角色, 让它们参与进化不仅能够加大探索范围, 而且使得进化从不可行域向可行域进化, 从而提高种群多样性. 然而, 过多利用不可行解反而会影响收敛, 降低算法效率. 通过深入分析得知, 在进化前期应该更多利用部分优秀不可行解的有效信息, 以改善多样性维护能力, 而在进化后期应该注重收敛性, 以保证种群收敛到真实 PF. 基于上述思想, 提出一种个体比较准则, 如式(5)所示.

$$X_1 \text{ 优于 } X_2 \text{ 等价于} \Leftrightarrow \begin{cases} g^{le}(X_1 | \lambda, z^*) < g^{le}(X_2 | \lambda, z^*), G_1, G_2 \leq \varepsilon \\ G_1 < G_2, \text{ otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $G_1$  和  $G_2$  分别为个体  $X_1$  和  $X_2$  的约束违反度.  $\varepsilon$  随进化迭代次数变化, 如式(6)所示.

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon(0) \times (1 - t/G_{\max})^2, t \leq 0.4 \times G_{\max} \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $t$  为进化迭代次数,  $G_{\max}$  为最大进化迭代次数.  $\varepsilon(0)$  为初始值, 其设置方式如式(7)所示.

$$\varepsilon(0) = 0.4 \times \sum_{i=1}^N G(X_i) / N, i = 1, \dots, N \quad (7)$$

式中,  $N$  为种群规模,  $G(X_i)$  为初始种群个体  $X_i$  的约束违反度,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

式(6)和式(7)通过调节  $\varepsilon$ , 能够在容忍的约束违反度下扩大约束区域, 让更多约束违反度小的不可行解参与进化, 加强对可行域边界的探索力度, 以提高种群多样性. 同时,  $\varepsilon$  随进化迭代次数的增大逐渐减小直至为零, 从而不断缩小约束区域, 促使进化到达可行域. 因此, 式(5)、式(6)和式(7)通过互相配合, 在进化前期能够让优秀不可行解参与进化来提高多样性; 在进化后期个体比较准则有点类似于 Deb 准则, 强调可行解优于不可行解, 从而保障算法不断逼近最优可行区域.

### 3.3 算法流程

综上所述, 给出  $\varepsilon$ C-MOEA/D 的具体操作流程.

Step 1: 初始化阶段

Step 1.1: 生成  $N$  个均匀分布的权重向量  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ;

Step 1.2: 计算任意两个权重向量之间的欧氏距离, 求出权重向量的邻域集合  $B(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_T\}$ ,  $B(i)$  代表距离  $\lambda_i$  最近的  $T$  个权重向量的索引;

Step 1.3: 随机生成初始种群  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ , 令  $FV^i = F(X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;

Step 1.4: 构造参考点  $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*)$ ,  $z_i^* = \min\{f_i(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in \Omega\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

Step 1.5: 利用 3.1 节方法为所有权重向量重新分配个体;

Step 1.6: 设置初始进化迭代次数  $t = 1$ .

Step 2: 进化阶段

Step 2.1: 从每一个  $B(i)$  中随机选取两个个体与  $X_i$  进行差分变异和交叉操作, 生成试验个体  $Y^*$ ;

Step 2.2: 对  $Y^*$  进行指数变异操作, 生成个体  $Y$ ;

Step 2.3: 若  $Y$  的某一维分量超出定义域, 对其进行修补操作, 重新回到定义域内;

Step 2.4: 计算新生个体的目标函数值  $F(Y) = (f_1(Y), f_2(Y), \dots, f_m(Y))$ .

Step 3: 更新阶段

Step 3.1: 更新参考点, 若  $z_i^* < f_i(Y)$ , 则令  $z_i^* = f_i(Y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

Step 3.2: 利用 3.2 节方法进行个体比较, 若  $Y$  优于  $X_i$ , 令  $X_i = Y, FV^i = F(Y)$ ;

Step 3.3: 如果  $\text{mod}(\text{进化迭代次数 } t/20) = 0$ , 利用

3.1 节方法为所有权重向量重新分配个体. 其中,  $\text{mod}(A/B)$  代表 A 取模 B;

Step 4: 判断终止条件. 若  $t = G_{\max}$ , 则算法停止并输出种群中的 Pareto 最优解, 否则,  $t = t + 1$ , 返回 Step 2.

#### 4 实验与分析

为验证  $\varepsilon$ C-MOEA/D 的求解性能, 将其与目前三种优秀算法 MOEA/D-SR<sup>[10]</sup>、MOEA/D-CDP<sup>[10]</sup>、MOEA/D-PF<sup>[11]</sup>、Liuli<sup>[15]</sup>、MTS<sup>[16]</sup> 进行对比实验. 所有实验在硬件配置为 Intel Pentium, CPU: G620, 4GB 内存、主频 2.6GHz 的计算机上进行, 程序采用 MATLAB R2010 编写.

##### 4.1 测试函数与评价指标

选用通用的标准测试函数 CF1-CF7<sup>[17]</sup>、C-DTLZ1<sup>[18]</sup>、C-DTLZ2<sup>[18]</sup> 和 C-DTLZ4<sup>[18]</sup> 对算法性能进行测试.

为定量评估算法的求解性能, 采用通用的反转世代距离 (Inverted Generational Distance, IGD<sup>[19]</sup>) 进行衡量, 具体如式 (8) 所示.

$$\text{IGD} = \frac{1}{N_{\text{PF}}} \left( \sum_{i=1}^n d_i^p \right)^{1/p} \quad (8)$$

式中,  $N_{\text{PF}}$  为真实 PF 中取样个体的数量,  $p = 2$ ,  $d_i$  为真实 PF 第  $i$  个个体的目标向量到所求近似 Pareto 解集中最近个体的欧氏距离. IGD 能够综合评价解集的分布性和收敛性, IGD 越小, 表明所求近似 Pareto 最优解集的分布性和收敛性越好.

##### 4.2 重新匹配策略的有效性测试

为验证重新匹配策略的有效性, 将其与随机分配策略<sup>[20]</sup> 进行对比实验. 算法实验参数取值为:  $N = 200$ ,  $G_{\max} = 1500$ ,  $F = 0.5$ ,  $CR = 0.9$ ,  $\eta = 20$ ,  $p_m = 1/n$ . 在相同条件下独立运行实验 30 次, 对比实验结果如表 1 所示.

表 1 随机分配策略和重新匹配策略求得的 IGD

测试函数	随机分配策略		重新匹配策略	
	均值	标准差	均值	标准差
CF1	0.0033	0.0010	<b>0.0022</b>	<b>0.0006</b>
CF2	0.0035	0.0014	<b>0.0025</b>	<b>0.0002</b>
CF3	0.2293	0.1596	<b>0.1780</b>	<b>0.1408</b>
CF4	0.0136	0.0183	<b>0.0081</b>	<b>0.0020</b>
CF5	0.1924	0.0738	<b>0.1199</b>	<b>0.0613</b>
CF6	0.0144	0.0112	<b>0.0113</b>	<b>0.0021</b>
CF7	<b>0.1433</b>	0.0680	0.1459	<b>0.0668</b>

由表 1 可以看出, 在 CF1、CF2、CF3、CF4、CF5 和 CF6 上, 重新匹配策略的 IGD 均值均有较大程度的减小, 这表明所求近似 Pareto 最优解集在分布性和收敛性均有明显改善. 在 CF7 上, 两者 IGD 均值和标准差相当. 同时, 在所有测试函数上, 重新匹配策略的 IGD 标准差均优于随机分配策略, 这说明它对提升算法的鲁

棒性起到了较大作用. 综上分析可以得出, 重新匹配策略通过为权重向量重新分配个体, 提高了种群多样性, 使得所求近似 Pareto 最优解集分布更加均匀. 由于种群多样性的改善, 为算法最终收敛到真实 PF 提供保障. 以上实验结果证明重新匹配策略是有效的.

##### 4.3 算法整体性能测试与分析

为验证本文算法的先进性, 将其与目前 5 种性能优异的算法 MOEA/D-SR<sup>[10]</sup>、MOEA/D-CDP<sup>[10]</sup>、MOEA/D-PF<sup>[11]</sup>、LIULI<sup>[15]</sup>、MTS<sup>[16]</sup> 进行对比实验. 为保证公平性, 在二目标测试函数 CF1-CF7 上, 算法参数均取值为: 种群规模  $N = 200$ , 最大进化迭代次数  $G_{\max} = 1500$ , 独立实验运行次数为 30 次; 在三目标测试函数 C-DTLZ1、C-DTLZ2 和 C-DTLZ4 上, 算法参数均取值为: 种群规模  $N = 300$ , 最大进化迭代次数  $G_{\max} = 1000$ , 独立实验运行次数为 30 次.  $\varepsilon$ C-MOEA/D 中其他参数取值为:  $F = 0.5$ ,  $CR = 0.9$ ,  $\eta = 20$ ,  $p_m = 1/n$ . 四种算法的对比实验结果如表 2 和表 3 所示.

表 2 六种算法在二目标测试函数上求得的 IGD

函数	算法	IGD			
		最小值	最大值	均值	标准差
CF1	LIULI	<b>0.0007</b>	<b>0.0011</b>	<b>0.0009</b>	<b>0.0001</b>
	MTS	0.0139	0.0236	0.0192	0.0026
	MOEA/D-PF	0.0031	0.0110	0.0054	0.0002
	MOEA/D-SR	0.0050	0.0252	0.0150	0.0016
	MOEA/D-CDP	0.0012	0.0037	0.0024	0.0006
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	0.0012	0.0032	0.0022	0.0006
CF2	LIULI	0.0027	0.0131	0.0042	0.0026
	MTS	0.0041	0.0518	0.0268	0.0147
	MOEA/D-PF	0.0026	0.0891	0.0071	0.0215
	MOEA/D-SR	0.0024	0.0071	0.0033	0.0016
	MOEA/D-CDP	0.0024	0.0069	0.0031	0.0009
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	<b>0.0021</b>	<b>0.0032</b>	<b>0.0025</b>	<b>0.0002</b>
CF3	LIULI	0.0908	0.2519	0.1829	0.0421
	MTS	0.0753	<b>0.2428</b>	0.1845	<b>0.0156</b>
	MOEA/D-PF	<b>0.0529</b>	0.3880	0.1856	0.0799
	MOEA/D-SR	0.0767	0.7861	0.7437	0.0448
	MOEA/D-CDP	0.0595	0.7360	0.7067	0.1791
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	0.0552	0.7246	<b>0.1780</b>	0.1408
CF4	LIULI	0.0090	0.0240	0.0142	0.0033
	MTS	0.0090	0.0143	0.0111	0.0024
	MOEA/D-PF	<b>0.0053</b>	0.1282	0.0154	0.0235
	MOEA/D-SR	0.0054	0.1136	0.0103	0.0046
	MOEA/D-CDP	0.0060	0.1258	0.0092	0.0236
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	<b>0.0053</b>	<b>0.0129</b>	<b>0.0081</b>	<b>0.0020</b>

续表

函数	算法	IGD			
		最小值	最大值	均值	标准差
CF5	LIULI	0.0588	<b>0.1930</b>	0.1297	0.0307
	MTS	<b>0.0176</b>	0.2780	0.2080	<b>0.0240</b>
	MOEA/D-PF	0.0609	0.4745	0.2273	0.1165
	MOEA/D-SR	0.0343	0.3458	0.1388	0.1109
	MOEA/D-CDP	0.0534	0.4059	0.2327	0.1051
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	0.0431	0.2645	<b>0.1199</b>	0.0613
CF6	LIULI	0.0090	0.0199	0.0139	0.0026
	MTS	0.0100	0.0381	0.0162	0.0060
	MOEA/D-PF	0.0078	0.0614	0.0342	0.0159
	MOEA/D-SR	0.0091	0.0826	0.0292	0.0199
	MOEA/D-CDP	0.0082	0.0749	0.0285	0.0156
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	<b>0.0070</b>	<b>0.0142</b>	<b>0.0113</b>	<b>0.0021</b>
CF7	LIULI	0.0535	0.2039	0.1045	0.0351
	MTS	<b>0.0186</b>	<b>0.0371</b>	<b>0.0247</b>	<b>0.0047</b>
	MOEA/D-PF	0.0488	0.5260	0.2006	0.1156
	MOEA/D-SR	0.0494	0.3462	0.1894	0.0917
	MOEA/D-CDP	0.0498	0.3681	0.2216	0.0759
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	0.0493	0.3818	0.1459	0.0668

由表 2 可以看出,在 CF2-CF6 上,  $\varepsilon$ C-MOEA/D 取得最优 IGD 均值,这说明  $\varepsilon$ C-MOEA/D 在 CF2-CF6 上所求近似 Pareto 最优解集的分布性和收敛性是最好的. 同时,LIULI 在 CF1 上获得最优 IGD 均值,MTS 在 CF7 上获得最优 IGD 均值. 在 CF2、CF4 和 CF6 上,  $\varepsilon$ C-MOEA/D 获得的最小值、最大值、平均值和标准差均优于其他五种算法,LIULI 只在 CF1 上获得最优的最小值、最大值、平均值和标准差,MTS 只在 CF7 上获得最优的最小值、最大值、平均值和标准差. 综上,  $\varepsilon$ C-MOEA/D 在分布性和收敛性上相比其他算法具有一定优势.

CF1 的真实 PF 由 21 个离散点组成,需要良好的探索能力才能找到所有离散点. 但 MOEA/D-PF、MOEA/D-SR 和 MOEA/D-CDP 均出现在边界区域未完全收敛的情况,而 LIULI 和  $\varepsilon$ C-MOEA/D 较好地收敛到真实 PF;CF2 的真实 PF 由一个离散点和两片连续区域组成. 所有算法在连续区域均都以较好分布逼近到真实 PF,但五种对比算法均未完全收敛到边界点,  $\varepsilon$ C-MOEA/D 在边界区域获得更优收敛性,表明其具有更好的边界开发能力;CF3 的真实 PF 是非凸的,对其求解难度十分大. 所有算法未能找到全部的真实 PF,这表明在求解非凸问题时它们都存在缺陷;CF4 的真实 PF 是连续的. 所有算法都以较好的分布性收敛到了真实 PF,

但 MOEA/D-PF 和 MOEA/D-SR 在边界区域未完全收敛;CF5 的真实 PF 与 CF4 相同,但由于 CF5 的目标函数更复杂使其求解难度更大. 所有算法都出现了分布性不均匀的问题,然而  $\varepsilon$ C-MOEA/D 所求解集的分布更宽广,MTS 所求解集的逼近性更好,这表明  $\varepsilon$ C-MOEA/D 具有更好的多样性维持能力,MTS 具有更优的收敛性能;CF6 的真实 PF 是连续的,并且在  $f_1$  目标上靠近 1 的部分区域是非凸的. 五种对比算法在非凸区域的收敛性欠佳,而  $\varepsilon$ C-MOEA/D 所求解集更好地收敛到 PF 并且分布均匀.CF7 的真实 PF 和 CF6 相同,但 CF7 的目标函数更复杂其求解更困难. 所有算法都未找到全部的 PF 区域,MTS 所求解集的分布性更加广泛.

表 3 四种算法在三目标测试函数上求得的 IGD

函数	算法	IGD			
		最小值	最大值	均值	标准差
C-DTLZ1	MOEA/D-PF	0.0029	0.0064	0.0048	0.0009
	MOEA/D-SR	0.0058	0.0088	0.0070	0.0008
	MOEA/D-CDP	0.0041	0.0067	0.0053	0.0007
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	<b>0.0025</b>	<b>0.0055</b>	<b>0.0044</b>	<b>0.0006</b>
C-DTLZ2	MOEA/D-PF	0.0061	0.0109	0.0083	0.0012
	MOEA/D-SR	0.0072	0.0194	0.0135	0.0022
	MOEA/D-CDP	0.0098	0.0144	0.0118	0.0013
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	<b>0.0059</b>	<b>0.0104</b>	<b>0.0078</b>	<b>0.0012</b>
C-DTLZ4	MOEA/D-PF	0.0430	0.0501	0.0475	0.0019
	MOEA/D-SR	0.0509	0.0560	0.0532	0.0017
	MOEA/D-CDP	0.0467	0.0528	0.0489	<b>0.0015</b>
	$\varepsilon$ C-MOEA/D	<b>0.0383</b>	<b>0.0471</b>	<b>0.0425</b>	0.0019

由表 3 可看出,在所有三目标测试函数上,  $\varepsilon$ C-MOEA/D 获得的 IGD 均值均小于其他三种算法,表明其多样性和收敛性均最优.  $\varepsilon$ C-MOEA/D 在所有测试函数上取得的 IGD 最小值和最大值是最优的,在 C-DTLZ1 和 C-DTLZ2 上获得的 IGD 方差是最优的,表明  $\varepsilon$ C-MOEA/D 的鲁棒性较好. 综上可以得出,相比于三种对比算法,  $\varepsilon$ C-MOEA/D 所求解集的分布性和收敛性均具备一定的优势.

为进一步直观了解  $\varepsilon$ C-MOEA/D 的求解性能,选取求解最困难的 C-DTLZ2 和 C-DTLZ4,并给出四种算法在 30 次独立运行中获得最优 IGD 的一次结果,如图 5 和图 6 所示. 其中,红色圆圈代表所求近似 Pareto 最优解集,蓝色实点代表真实 PF.

由图 5 可以看出,在 CDTLZ2 上,四种算法均未完全收敛到真实 PF,而  $\varepsilon$ C-MOEA/D 所求 Pareto 最优解集分布更宽广,并且包含所有真实 PF,这表明  $\varepsilon$ C-MOEA/D 的多样性维持能力是最好的,但在收敛性能上和其他

算法一样还需进一步加强.

由图 6 可以看出,在 CDTLZ4 上, $\epsilon$ C-MOEA/D 在边界区域上搜索到了所有 Pareto 解,但其他三种算法均出

现了丢失部分边界解的现象.同时  $\epsilon$ C-MOEA/D 所求 Pareto 解集更加广泛地覆盖了整个真实 PF. 综上,相比于三种对比算法,本文算法在分布性和收敛性上均更优.

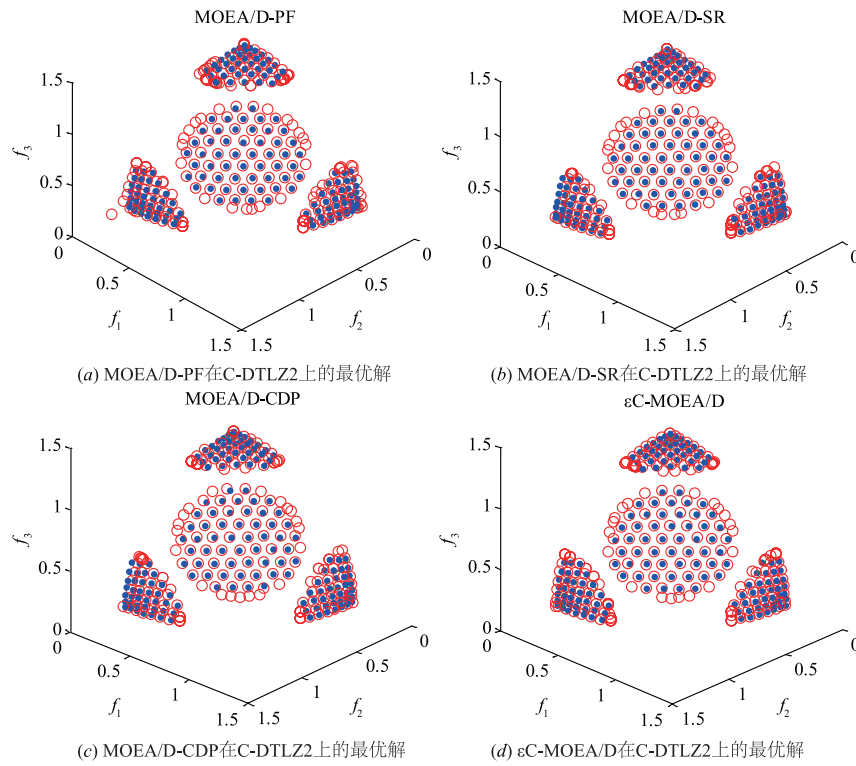


图5 四种算法在C-DTLZ2上的最优解

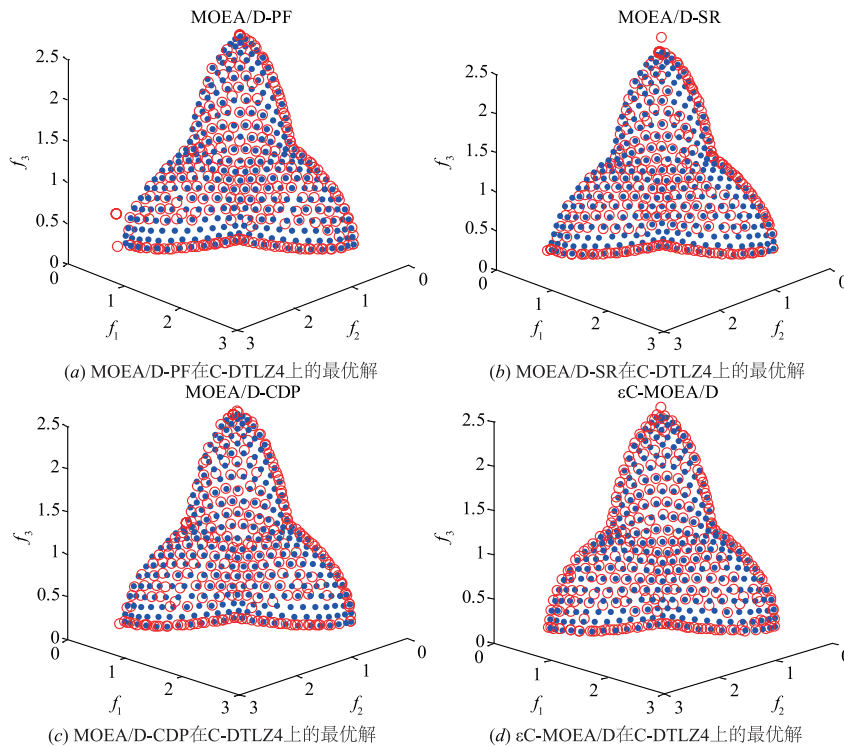


图6 四种算法在C-DTLZ4上的最优解

## 5 结束语

MOEA/D 算法随机给权重向量分配个体造成种群多样性降低,本文提出一种基于重新匹配策略的  $\varepsilon$  约束多目标分解优化算法. 首先对 Tchebycheff 分解策略进行理论推导,得到两条关于多样性和收敛性的定理,从而为研究 MOEA/D 算法奠定一定理论基础;其次提出权重向量与个体间的重新匹配策略有效改善了种群多样性,为求得分布性和收敛性均优的 Pareto 最优解集提供保障. 最后  $\varepsilon$  约束方法较好地平衡了多样性和收敛性,进一步提高了算法的整体约束多目标优化性能. 通过在二目标和三目标标准测试函数上进行对比实验,结果表明  $\varepsilon$ C-MOEA/D 求得的近似 Pareto 最优解集在分布性和收敛性上均具有一定优势.

下一步研究工作将围绕约束高维多目标优化问题及其应用进行展开,以满足实际应用需求.

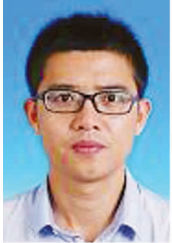
### 参考文献

- [1] Zhang Q, Li H. MOEA/D: A multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712 – 731.
- [2] Lin Q, Li J, Du Z, et al. A novel multi-objective particle swarm optimization with multiple search strategies [J]. European Journal of Operational Research, 2015, 247(3): 732 – 744.
- [3] Sun X, Chen Y, Liu Y, et al. Indicator-based set evolution particle swarm optimization for many-objective problems [J]. Soft Computing, 2016, 20(6): 2219 – 2232.
- [4] 王亚辉, 吴金妹, 贾晨辉. 基于动态种群多策略差分进化模型的多目标进化算法 [J]. 电子学报, 2016, 44(6): 1472 – 1480.  
Wang Yahui, Wu Jinmei, Jia Chenhui. Multi-objective evolutionary algorithm based on dynamic population multi-strategy differential models [J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(6): 1472 – 1480. (in Chinese)
- [5] Ma X, Liu F, Qi Y, et al. A multi-objective evolutionary algorithm based on decision variable analyses for multi-objective optimization problems with large-scale variables [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(2): 275 – 298.
- [6] Wagner M, Bringmann K, Friedrich T, et al. Efficient optimization of many objectives by approximation guided evolution [J]. European Journal of Operational Research, 2015, 243(2): 465 – 479.
- [7] 张兴义, 蒋小三, 张磊. 基于权值向量的偏好多目标优化方法 [J]. 电子学报, 2016, 44(11): 2639 – 2645.  
Zhang Xingyi, Jiang Xiaosan, Zhang Lei. A weight vector based multi-objective optimization algorithm with preference [J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(11): 2639 – 2645. (in Chinese)
- [8] 周爱民, 张青富, 张桂戌. 一种基于混合高斯模型的多目标进化算法 [J]. 软件学报, 2014(5): 913 – 928.  
Zhou Aiming, Zhang Qingfu, Zhang Guixu. Multiobjective evolutionary algorithm based on mixture gaussian models [J]. Journal of Software, 2014(5): 913 – 928. (in Chinese)
- [9] Zhu Q, Lin Q, Du Z, et al. A novel adaptive hybrid crossover operator for multi-objective evolutionary algorithm [J]. Information Sciences an International Journal, 2016, 345(C): 177 – 198.
- [10] Jan M A, Khanum R A. A study of two penalty-parameterless constraint handling techniques in the framework of MOEA/D [J]. Applied Soft Computing, 2013, 13(1): 128 – 148.
- [11] Woldesenbet Y G, Yen G G, Tessema B G. Constraint handling in multi-objective evolutionary optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2009, 13(3): 514 – 525.
- [12] Qiu X, Huang Y, Tan K C. A novel multi-objective optimization framework combining NSGA-II and MOEA/D [A]. Proceedings of Asia Pacific Symposium on Intelligent and Evolutionary Systems [C]. Singapore: Springer, 2015. 227 – 237.
- [13] Jan M A, Khanum R A, Tairan N M, et al. Performance of a constrained version of MOEA/D on CTP-series test instances [J]. International Journal of Advanced Computer Science and Applications, 2016, 7(6): 496 – 505.
- [14] Qi Y, Ma X, Liu F, et al. MOEA/D with adaptive weight adjustment [J]. Evolutionary Computation, 2014, 22(2): 231 – 264.
- [15] Liu H L, Li X. The multiobjective evolutionary algorithm based on determined weight and sub-regional search [A]. IEEE Congress on Evolutionary Computation [C]. Trondheim: IEEE, 2009. 1928 – 1934.
- [16] Tseng L Y, Chen C. Multiple trajectory search for unconstrained/constrained multi objective optimization [A]. IEEE Congress on Evolutionary Computation [C]. Trondheim: IEEE, 2009. 1951 – 1958.
- [17] Zhang Q, Zhou A, Zhao S, et al. Multiobjective optimization test instances for the CEC 2009 special session and competition [J]. University of Essex, 2008.
- [18] Asafuddoula M, Ray T, Sarker R. An efficient constraint handling approach for optimization problems with limited feasibility and computationally expensive constraint evaluations [A]. IEEE Conference on Genetic and Evolutionary Computation [C]. Cancun: IEEE, 2013. 113 – 114.
- [19] Tseng L Y, Chen C. Multiple trajectory search for uncon-

strained/constrained multi-objective optimization [ A ].  
IEEE Congress on Evolutionary Computation [ C ]. Trondheim; IEEE, 2009. 1951 - 1958.

- [ 20 ] Asafuddoula M, Ray T, Sarker R, et al. An adaptive constraint handling approach embedded MOEA/D [ A ]. IEEE Congress on Evolutionary Computation [ C ]. Brisbane; IEEE, 2012. 1 - 8.

#### 作者简介



张 磊 男, 1987 年出生, 湖北荆州人. 长江大学电子信息学院讲师. 研究方向为智能信息处理技术.

E-mail: zl12306124@163.com



毕晓君 女, 1964 年出生, 黑龙江哈尔滨人. 哈尔滨工程大学信息与通信工程学院教授、博士生导师. 研究方向为智能信息处理技术、数字图像处理.



王艳娇 女, 1985 年出生, 吉林吉林人. 东北电力大学信息工程学院副教授. 研究方向为智能信息处理技术、进化算法.